II. Pour tout nombre complexe z différent de 1, on considère les points M et M′ d'affixes respectives z et z′ où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour tout $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner à l'aide des points A, M et M′, une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\frac{z'-1}{z-1}$.

2. En déduire que A, M et M′ sont alignés, si et seulement si, $\frac{z^2}{z-1}$ est un réel.

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$.

On désigne par M_n le point du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}) \equiv \alpha_n \ [2\pi]$.

1. Placer les points M_n, pour $0 \leq n \leq 8$.

2. On note z_n l'affixe de M_n. Ecrire z_n sous forme exponentielle.

3. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés.

4. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

5. Montrer que pour tout entier n, $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$.

En déduire que pour tout entier n, le triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ est équilatéral.

33 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = -1$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que $\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

3. En déduire les solutions de l'équation $(z+i)^4 = -(z-i)^4$.

34 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $-i$.

On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = \frac{i\bar{z}}{i-z}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. a. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $(z'+i)(\bar{z}-i) = 1$.

b. En déduire que $AM'.AM = 1$ et que $M' \in [AM)$.

3. a. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

Montrer que l'affixe de $f(M)$ est égale à $e^{i\theta}$, si et seulement si, $z = -\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

c. En déduire les solutions de l'équation $iz^3 = (-i-z)^3$.

35 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un réel et l'équation $(E) : z^2 + a(1-i)z - ia^2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

On notera z_1 la solution réelle et z_2 l'autre solution.

2. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2 + z_1$ et z_2.

Soit le carré de sens direct ACBD.

a. Montrer que le point C est fixe.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points D lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

36 1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$.

b. Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.